

---

## **DETERMINAÇÃO DO MÓDULO DE ELASTICIDADE NA COMPRESSÃO PARALELA ÀS FIBRAS DA MADEIRA: PROPOSTA DE METODOLOGIA ALTERNATIVA**

### **DETERMINATION OF MODULUS OF ELASTICITY IN COMPRESSION PARALLEL TO THE GRAIN IN WOOD: PROPOSED ALTERNATIVE METHOD**

**CHRISTOFORO, André Luis**

Departamento de Engenharia Civil (DECiv)  
alchristoforo@yahoo.com.br

**PANZERA, Túlio Hallak**

Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de São João del-Rei (UFSJ)  
tuliopanzera@hotmail.com

**MOLINA, Júlio César**

Faculdade de Engenharia, Universidade Paulista Júlio de Mesquita Filho (UNESP)  
julioedm@sc.usp.br

**ALMEIDA, Diego Henrique de**

Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos (EESC/USP)  
scaliente@usp.br

**LAHR, Francisco Antonio Rocco**

Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos (EESC/USP)  
frocco@sc.usp.br

**CHAHUD, Eduardo**

Faculdade de Engenharia e Arquitetura (FEA/FUMEC)  
chahud@fumec.br

## **RESUMO**

Este trabalho propõe uma metodologia alternativa para determinação do módulo de elasticidade na compressão paralela às fibras fundamentada

no método dos mínimos quadrados, possibilitando utilizar vários valores de forças e deslocamentos obtidos da experimentação, conferindo, em princípio, maior confiabilidade no cálculo da rigidez. Foram considerados os resultados de dezesseis corpos de prova de *Pinus elliottii* var. *elliottii*, ensaiados segundo as premissas do Anexo B da ABNT NBR 7190:1997. Os módulos de elasticidade obtidos da abordagem proposta foram comparados com os módulos de elasticidade obtidos de acordo com o recomendado pela norma Brasileira. Os resultados da análise de variância indicaram equivalência estatística entre os módulos de elasticidade obtidos por ambas as formas de cálculo. Entretanto, dada a natureza não homogênea da madeira, para generalização dos resultados cabe a realização de ensaios com espécies que cubram todas as classes de resistência da NBR 7190:1997.

**Palavras-chave:** Madeira, módulo de elasticidade, compressão paralela às fibras.

## **ABSTRACT**

This study aimed to present an alternative methodology to determine the compression modulus of elasticity based on the least squares method, allowing multiple uses of load and displacements values obtained from the experiment, giving greater reliability in the calculation of stiffness. We used sixteen specimens of *Pinus elliottii* var. *elliotti* wood species, tested in compression parallel to the grain according to the assumptions of the Brazilian standard ABNT NBR 7190:1997. The modulus of elasticity obtained from the proposed calculation approaches were compared with the elastic moduli obtained from Brazilian standard recommendations. Results of analyzes of variance showed statistical equivalence between the moduli of elasticity obtained for both forms of calculation. However, considering the non-homogeneity of wood, to generalize the conclusions is the anisotropic nature of wood, it is necessary new set tests involving all strength classes indicate by NBR 7190:1997.

**Keywords:** Wood, modulus of elasticity, compression.

## INTRODUÇÃO

A ABNT NBR 7190:1997 (Projeto de Estruturas de Madeira) considera que as propriedades de resistência e de rigidez à compressão paralela às fibras devem ser tomadas como referência para o dimensionamento dos elementos estruturais de madeira, seja no caso de pilares, de barras de treliças ou, mesmo, de peças sujeitas à flexão. Detalhes adicionais referentes a esta diretriz normativa são apresentados por diversos autores, como Rocco Lahr e Dias (1998); Calil, Rocco Lahr e Dias (2003); Christoforo *et al.* (2011), entre outros.

Especificamente no caso da avaliação do desempenho de peças estruturais de madeira, o módulo de elasticidade na compressão paralela às fibras ( $E_c$ ) se constitui em parâmetro de fundamental importância (ROCCO LAHR, 1983; ZANGIÁCOMO, 2007; MOLINA, CALIL e FREITAS, 2011; CHRISTOFORO *et al.*, 2012). Neste contexto, cabe lembrar que a obtenção de  $E_c$  se dá atendendo a procedimentos e expressões de cálculo contidos em documentos normativos e, no Brasil, tal propriedade é estimada de acordo com as premissas contidas no Anexo B do mencionado documento normativo.

Entretanto, no cálculo do módulo de elasticidade por esta norma, assim como em documentos normativos internacionais, não são utilizadas metodologias baseadas em critérios de otimização, ficando a rigidez determinada pela inclinação do trecho linear elástico do diagrama tensão×deformação ou pelo conhecimento de dois níveis de tensão e deformação sucessivos medidos na região de proporcionalidade entre tensão e deformação (MORALES e ROCCO LAHR, 2002; FERRO *et al.*, 2012).

O presente trabalho objetivou desenvolver e aplicar uma metodologia alternativa para o cálculo de  $E_c$  com base nos fundamentos do método dos mínimos quadrados, possibilitando o uso de vários níveis de forças e deformações obtidas da experimentação, aspecto que poderá conferir maior nível de confiabilidade na determinação desta propriedade mecânica. Os módulos de elasticidade foram também obtidos de acordo com a metodologia da norma Brasileira ABNT NBR 7190:1997, possibilitando comparar e avaliar os resultados.

## MATERIAIS E MÉTODOS

A metodologia alternativa para o cálculo do módulo de elasticidade ( $E_c$ ) possibilita o emprego de vários níveis de força ( $F$ ) e deslocamentos ( $\delta$ ) durante a experimentação de um corpo de prova, assim como ilustra a Figura 1, sendo o melhor módulo de elasticidade ajustado de acordo o método dos mínimos quadrados, cujo somatório dos desvios entre a nuvem de pontos e a curva a ser ajustada é o menor possível.

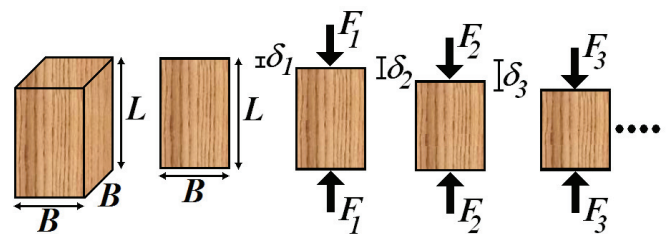


Figura 1: Forças e deslocamentos para o cálculo do  $E_c$ .

Os desvios são constituídos pelas diferenças entre os deslocamentos experimentais com os teóricos (analíticos), advindos da resistência dos materiais, tendo o módulo de elasticidade como variável dependente. Dessa forma, elegendo-se um número finito de resultados em forças e deslocamentos da experimentação, o módulo de elasticidade da presente metodologia se ajustará a este conjunto de forma única, resultando em módulos mais confiáveis a medida em que o número de pontos amostrais aumenta.

A equação para o cálculo do aqui chamado de módulo de elasticidade alternativo ( $E_c$ ) é apresentada para dois níveis de força e deslocamentos obtidos da experimentação, sendo generalizada posteriormente por indução.

Da mecânica dos sólidos, os deslocamentos ( $\Delta$ ) em barras carregadas axialmente são obtidos por intermédio da Equação 1, sendo  $E$  o módulo de elasticidade longitudinal ou de Young,  $F$  a força aplicada,  $L$  o comprimento do corpo e  $A$  a área da seção transversal.

$$\Delta = \frac{F \cdot L}{E \cdot A} \quad (1)$$

Definindo-se as duas medidas sucessivas de força  $F_1$  e  $F_2$  relacionadas aos deslocamentos  $\delta_1$  e  $\delta_2$ , obtidos experimentalmente, os deslocamentos analíticos para  $F_1$  e  $F_2$  ficam expressos pelas Equações 2 e 3 respectivamente, escritos como função do módulo de elasticidade longitudinal.

$$\ddot{A}_1(E) = \frac{F_1 \cdot L}{E \cdot A} \quad (2)$$

$$\dot{A}_2(E) = \frac{F_2 \cdot L}{E \cdot A} \quad (3)$$

A presente metodologia fundamenta-se na idéia de mínimos quadrados (Equação 4), objetivando-se determinar o valor do módulo de elasticidade para que o resíduo gerado entre os valores dos deslocamentos analíticos ( $\Delta(E)_i$ ) e experimentais ( $\delta_i$ ) seja o menor possível.

$$f(E) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^n (\Delta(E)_i - \delta_i)^2 \quad (4)$$

Substituindo-se as Equações 2 e 3 na Equação 4 e derivando-se esta última e igualando-a a zero chega-se ao valor do módulo de elasticidade ( $E_o$ ) que minimiza as diferenças entre ambos os deslocamentos, analíticos e experimentais (Equação 5), comprovando ser este ponto de mínimo global pelo critério da derivada segunda.

$$E_o = \frac{(F_1^2 + F_2^2) \cdot L}{A \cdot (F_1 \cdot \delta_1 + F_2 \cdot \delta_2)} \quad (5)$$

O módulo de elasticidade para três e quatro níveis de forças e deslocamentos medidos experimentalmente são expressos pelas Equações 6 e 7.

$$E_o = \frac{(F_1^2 + F_2^2 + F_3^2) \cdot L}{A \cdot (F_1 \cdot \delta_1 + F_2 \cdot \delta_2 + F_3 \cdot \delta_3)} \quad (6)$$

$$E_o = \frac{(F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + F_4^2) \cdot L}{A \cdot (\delta_1 \cdot F_1 + F_2 \cdot \delta_2 + F_3 \cdot \delta_3 + F_4 \cdot \delta_4)} \quad (7)$$

Para um conjunto de  $n$  forças e deslocamentos obtidos experimentalmente, o módulo de elasticidade fica obtido pela Equação 8.

$$E_{o,n} = \frac{L}{A} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n (F_i^2)}{\sum_{i=1}^n (F_i \cdot \delta_i)} \quad (8)$$

Para o cálculo do módulo de elasticidade, em cada um dos 16 corpos de prova de madeira *Pinus elliottii var. elliottii* foi-se determinada a força ( $F_{max}$ ) máxima aplicada, sendo utilizados os valores de forças e deslocamentos respectivamente iguais a 10%, 20%, 30%, 40% e 50% de  $F_{max}$ , dando origem a cinco valores de força ( $F_1$  a  $F_5$ ) e cinco valores em deslocamentos ( $\delta_1$  a  $\delta_5$ ) respectivamente. Os módulos de elasticidade foram obtidos utilizando-se os dois primeiros valores em forças ( $F_1$  e  $F_2$ ) e deslocamentos ( $\delta_1$  e  $\delta_2$ ), originando o módulo de elasticidade  $E_{o,2}$ , os três primeiros valores em forças e deslocamentos ( $E_{o,3}$ ), os quatro primeiros valores em forças e deslocamentos ( $E_{o,4}$ ) e os cinco primeiros valores em forças e deslocamentos ( $E_{o,5}$ ). Dessa forma, pela presente metodologia de cálculo, de cada peça foram obtidos cinco valores do módulo de elasticidade na compressão paralela.

O módulo de elasticidade na compressão paralela às fibras, segundo o Anexo B da ABNT NBR 7190:1997 ( $E_{st}$ ), é expresso pela Equação 9, sendo  $\sigma_{50\%}$  e  $\sigma_{10\%}$  e  $\varepsilon_{50\%}$  e  $\varepsilon_{10\%}$  os respectivos valores das tensões e deformações referentes a 10% e a 50% do valor da força máxima aplicada no corpo de prova.

$$E_{st} = \frac{\sigma_{50\%} - \sigma_{10\%}}{\varepsilon_{50\%} - \varepsilon_{10\%}} \quad (9)$$

Para avaliar a equivalência estatística entre os módulos de elasticidade obtidos por ambas as formas de cálculo foi-se utilizada a análise de variância (ANOVA), sendo a análise paramétrica efetuada com o auxílio do software Minitab® versão 14. Além da estatística paramétrica, foi-se utilizada também a estatística não paramétrica de Kruskal-Wallis segundo o teste de

Student-Newman-Keuls, com o auxílio do software BioEstat® versão 5.3, apenas para comparação dos resultados da ANOVA.

## RESULTADOS E DISCUSSÕES

A Tabela 1 apresenta os resultados dos módulos de elasticidade (MPa) na compressão paralela para das madeiras *Pinus elliottii var. elliottii*, sendo  $\bar{x}$  a média amostral, DP o desvio padrão e CV o coeficiente de variação.

Peça	E <sub>st</sub>	E <sub>0,2</sub>	E <sub>0,3</sub>	E <sub>0,4</sub>	E <sub>0,5</sub>
1	9985	10367	10532	9726	9755
2	9761	9623	10030	10115	9367
3	10928	11720	12897	11119	11877
4	10345	10103	10477	11029	10002
5	12443	12398	14070	13933	13550
6	10944	10959	11613	12248	11499
7	9578	9664	9413	9754	9806
8	11215	11512	11533	11370	11932
9	7682	7692	8030	8979	8314
10	10757	11306	11880	11181	11153
11	8387	8813	8210	8520	9282
12	13103	12716	14607	14567	13361
13	11253	12268	11462	11532	11708
14	10824	10615	11184	11318	10960
15	11984	12100	12835	12823	11613
16	10857	11200	11345	10913	11911
$\bar{x}$	10628	10816	11257	11196	11006
DP	1374	1387	1838	1641	1472
CV (%)	13	13	16	15	13

Tabela 1: Módulos de elasticidade na compressão paralela às fibras (MPa).

Os coeficientes de variação obtidos para os E<sub>c</sub> (norma e alternativo) se encontram dentro dos limites admitidos por Rocco Lahr (1990) e assumidos pela ABNT NBR 7190:1997.

As Figuras 2 e 3 ilustram respectivamente os gráficos de normalidade para os módulos de elasticidade (teste de Anderson-Darling) e homogeneidade entre variâncias (Testes de Bartlett e Levene), comprovando

os dados serem normais e sendo equivalentes as variâncias pelos P-valores encontrados por ambos os testes serem superiores a 5% (MONTGOMEY, 2005).

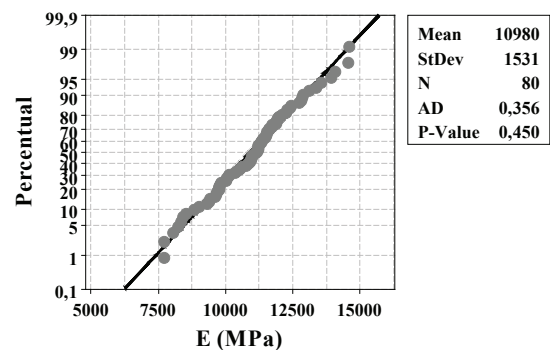


Figura 2: Gráfico de normalidade para os módulos de elasticidade.

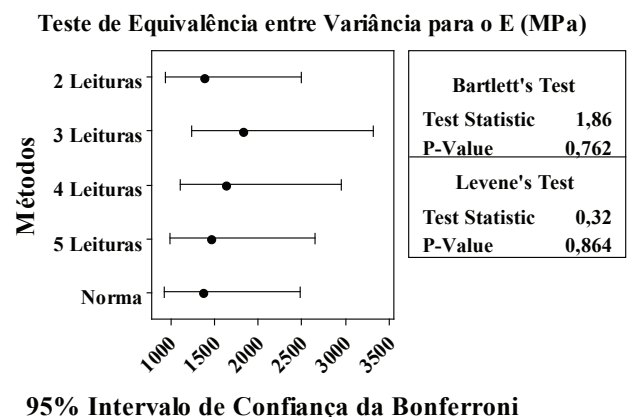
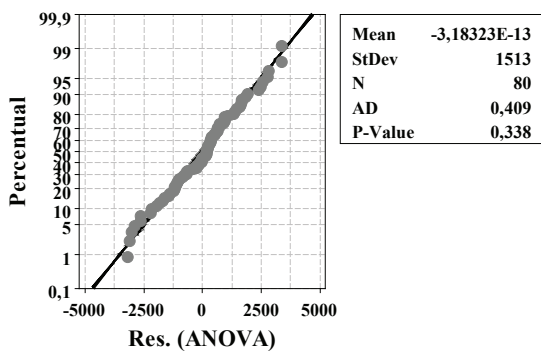


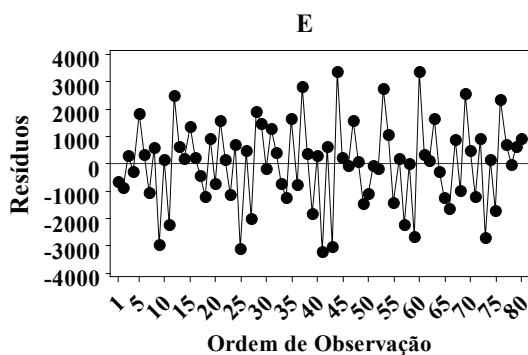
Figura 3: Test de Bartlett e Levene para a equivalência entre os módulos de elasticidade.

Verificadas as premissas da ANOVA, foi calculado em seguida o P-valor, sendo este igual a 0,768, o que comprova não haver diferença significativa entre as metodologias distintas na determinação dos módulos de elasticidade E<sub>c</sub> (P-valor>0,05).

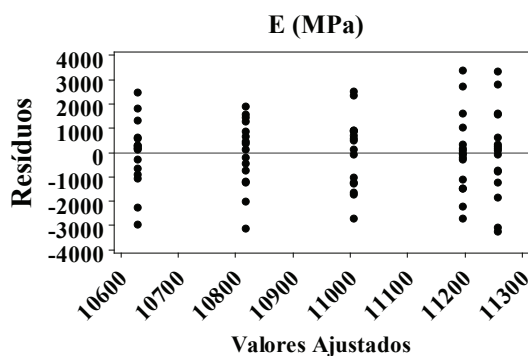
A Figura 4 ilustra o gráfico de normalidade (Figura 4a), independência (Figura 4b) e homogeneidade (Figura 4c) dos resíduos da análise de variância.



(a)



(b)



(c)

Figura 4: Resultados dos resíduos da ANOVA.

Os resultados do valor H, dos graus de liberdade e do P-valor do teste de Student-Newman-Keuls foram respectivamente iguais a 1,8078, 4 e 0,7710, comprovando também não serem significativas

as diferenças entre os módulos de elasticidade obtidos de ambas as formas de cálculo ( $P\text{-valor} > 0,05$ ). A Figura 5 apresenta o gráfico da diferença entre as médias dos postos.

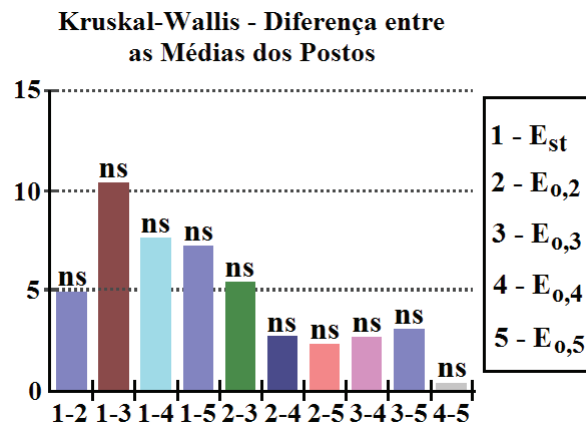


Figura 5: Gráfico da diferença entre s médios dos postos.

## CONCLUSÕES

A metodologia desenvolvida nos fundamentos do método dos mínimos quadrados mostrou ser de simples empregabilidade, possibilitando o uso de um conjunto de valores entre forças e deslocamentos no cálculo do módulo de elasticidade na compressão, conferindo maior confiabilidade na obtenção desta grandeza.

Os resultados da análise estatística paramétrica e não paramétrica revelaram equivalência entre os módulos de elasticidade na compressão paralela obtidos de acordo com os dois procedimentos aqui discutidos. Neste caso fica evidenciada a adequada aproximação fornecida pelo modelo de cálculo da norma Brasileira ABNT NBR 7190:1997.

Entretanto, dada a natureza não homogênea da madeira, para que seja possível a generalização dos resultados cabe a realização de ensaios com espécies que cubram todas as classes de resistência da NBR 7190:1997.

## BIBLIOGRAFIA

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (ABNT): NBR7190. Projeto de estruturas de madeira. Rio de Janeiro, 1997.

CALIL Jr, C.; ROCCO LAHR, F. A.; DIAS, A. A. Dimensionamento de elementos estruturais de madeira. 1. ed. Barueri - SP: Editora Manole Ltda, 2003. v. 1500. 152p.

CHRISTOFORO, A. L.; PANZERA, T. H.; BATISTA, F. B.; BORGES, P. H.; ROCCO LAHR, F. A.; FRANCO, C. F. The position effect of structural Eucalyptus round timber on the flexural modulus of elasticity. *Revista Engenharia Agrícola*, v. 31, p. 1219-1225, 2011.

CHRISTOFORO, A. L.; ROCCO LAHR, F. A.; MORALES, E. A. M.; ZANGIÁCOMO, A. L.; PANZERA, T. H. Influence of Displacements on Calculus of the Longitudinal Modulus of Elasticity of *Pinus caribaea* Structural Round Timber Beams. In *International Journal of Agriculture and Forestry*, v. 2, p. 157-160, 2012.

FERRO, F. S.; ICIMOTO, F. H.; ALMEIDA, D. H.; ROCCO LAHR, F. A. Influência das condições de ensaio nos valores do módulo de elasticidade da madeira na compressão paralela às fibras. In: XX Congresso Brasileiro de Engenharia e Ciência dos Materiais, 2012, Joinville, SC. *Anais do XX CBECIMAT*, v. único. p. 5354-5361, 2012.

MOLINA, J. C.; CALIL Jr, C.; FREITAS, R. R. Mathematical model to estimate of the deterioration of wooden poles in contact with soil used in rural areas. *Engenharia Agrícola (Impresso)*, v. 31, p. 1015-1026, 2011.

MONTGOMERY, D. C. Design and analysis of experiments. John Wiley & Sons Inc., 6a edition, Arizona, 2005.

MORALES, E. A. M.; ROCCO LAHR, F. A. Determinação do módulo de elasticidade da madeira: análise do número de ciclos de carregamento. *Revista Madeira*, São Carlos, SP, v. 8, p. 1-28, 2002.

ROCCO LAHR, F. A. Sobre a determinação de propriedades de elasticidade da madeira. 216p. Tese (Doutorado). Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. São Carlos, SP, 1983.

ROCCO LAHR, F. A. Considerações a respeito

da variabilidade de propriedades de resistência e elasticidade da madeira. Tese (Livre Docência). Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. São Carlos, SP, 1990.

ROCCO LAHR, F. A.; DIAS A. A. Maderas tropicales brasileñas alternativas. Madera: Ciencia y Tecnologia, v.1, p. 7-14, 1999.

ZANGIÁCOMO, A. L. Estudo de elementos estruturais roliços de madeira. Tese (Doutorado). Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. São Carlos, 2007.