

# FINANÇAS



# ESTIMAÇÃO DO PRÊMIO DE OPÇÕES ASIÁTICAS POR MONTE CARLO E QUASI-MONTE CARLO

ESTIMATION OF ASIAN OPTIONS PREMIUM BY MONTE CARLO AND QUASI-MONTE CARLO

Rafael Igrejas da Silva  
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

Marcelo Cabus Klotzle  
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

Marcio Almeida de Assis  
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

Leonardo Lima Gomes  
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

Antonio Carlos Figueiredo Pinto  
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

---

**Data de submissão:** 26 mar. 2012 . **Data de aprovação:** 02 jul. 2012 . **Sistema de avaliação:** Double blind review. Universidade FUMEC / FACE . Prof. Dr. Henrique Cordeiro Martins . Prof. Dr. Cid Gonçalves Filho . Prof. Dr. Luiz Claudio Vieira de Oliveira

---

## RESUMO

O trabalho se situa no campo de estudo de métodos numéricos, em finanças, e tem por objetivo comparar a utilização dos modelos estocásticos de Monte Carlo e Quasi-Monte Carlo com Sequências de Halton, para o apreçamento de opções asiáticas, em uma série de preços de etanol no mercado brasileiro. Em função da dificuldade do apreçamento de opções asiáticas por métodos analíticos tradicionais como Black & Scholes, os métodos de simulação, como os de Monte Carlo e Quasi-Monte Carlo, são comumente utilizados. O estudo utilizou uma sequência histórica de preços nominais, coletados semanalmente, por um período de 11 anos. Para as simulações, foi utilizado o programa *Matlab*. O estudo conclui que o modelo de Quasi-Monte Carlo-Halton tem melhores resultados do que o modelo de Monte Carlo, quando considerada a redução de variância da série de preços da *commodity*

avaliada. Por outro lado, o apreçamento de opções por ambos os modelos gera resultados muito próximos do modelo de Black & Scholes, mesmo considerando as divergências encontradas na literatura sobre a utilização do modelo de Black & Scholes, para o apreçamento de opções asiáticas.

#### PALAVRAS-CHAVE

Opções asiáticas. Etanol. Monte Carlo. Quasi-Monte Carlo. Sequências de Halton.

#### ABSTRACT

*This study is located within the field of numerical methods in finance and its aim is to compare the use of Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo stochastic models with Halton Sequences for the pricing of Asian options in a series of ethanol prices in the Brazilian market. Due to the difficulty of pricing Asian options using traditional analytical methods such as Black & Scholes, Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo simulation methods are commonly used. The study used a sequence of nominal prices collected on a weekly basis over an 11-year period. The simulations were performed using the Matlab program. The study concluded that the Quasi-Monte Carlo-Halton model produces better results than the Monte Carlo model when the reduction in the variance of the commodity's price series is considered. However, option pricing using both models generates very similar results to those obtained by the Black & Scholes model, despite the divergent opinions found in the literature regarding the use of the Black & Scholes model for the pricing of Asian options.*

#### KEYWORDS

*Asian options. Ethanol. Monte Carlo. Quasi-Monte Carlo. Halton sequences.*

## INTRODUÇÃO

O presente trabalho vem reiterar a importância crescente dos métodos numéricos em finanças, uma vez que os modelos financeiros, poucas vezes, são resolvidos por simples soluções analíticas (JOY; BOYLE; TAN, 1996). Diferentes técnicas são desenvolvidas

para solucionar equações complexas e ajustar a exatidão e a sensibilidade dos resultados. Em mercados altamente competitivos, com condições de produção de natureza cíclica e com alta volatilidade de preços, como os de *commodities* (MARTINS, 2009), o uso de ferramentas adequadas de apreçamento torna-se ainda mais necessário.

Tendo em vista a complexidade do tratamento de dados e a necessidade de resolução de problemas de difícil solução analítica, diferentes modelos de simulação têm sido empregados com base no método de Monte Carlo. Este método foi proposto, primeiramente, para problemas matemáticos, durante a Segunda Guerra Mundial (METROPOLIS, 1949), utilizando amostras aleatórias simples como um padrão para a simulação. A flexibilidade do método no tratamento de instrumentos financeiros complexos, mais especificamente no apreçamento de opções, gera discussões controversas há tempos, acerca de sua aplicabilidade, limitações e resultados alcançados (BOYLE, 1977).

Em função de algumas limitações do método de Monte Carlo, métodos alternativos foram criados, os quais, a princípio, melhorariam a eficiência dos resultados obtidos por Monte Carlo. Entre eles, encontra-se o método de baixa discrepância de Quasi-Monte Carlo, que será discutido neste trabalho e cuja ideia básica é a geração de sequências determinísticas de dados, em lugar de séries aleatórias. Segundo Niederreiter (1992), o método de Quasi-Monte Carlo, além de levar a um procedimento numérico mais eficiente, traz o benefício adicional de limites determinísticos para os erros. Para o método de Quasi-Monte Carlo, neste estudo, foi introduzido um tipo particular de sequência quase aleatória, conhecida como sequência de Halton. Dessa forma, a análise do preço e também dos instrumentos derivativos de preços pode ser útil no sentido de reduzir a incerteza futura e minimizar riscos (BRESSAN, 2004).

Este estudo tem a intenção de comparar os prêmios e a variância de opção asiática pelo método de simulação de Monte Carlo e Quasi-Monte Carlo, com os prêmios de Black & Scholes e a variância entre os modelos. Em todos os casos, foram simuladas opções de compra, a partir de séries de preços nominais de etanol divulgados pelo Centro de Estudos Avançados em Economia Aplicada (CEPEA).

Este estudo está estruturado da seguinte forma: após esta contextualização, são detalhadas as motivações da pesquisa e os objetivos da análise. Na sequência, são descritos processos e metodologia empregados, assim como evento e amostra utilizados. Em seguida, são apresentados os procedimentos de estimação e procedimento de teste. Finalmente, são apresentados os resultados do teste e conclusão.

### **Motivação da pesquisa**

O método de Monte Carlo é amplamente utilizado no apreçamento de ativos financeiros, bem como na resolução de integrais múltiplas de complexa solução analítica (HULL, 1999). As limitações do método são reconhecidas por diversos autores, entre os quais Niederreiter (1988) e Brandimarte (2006), assim como as alternativas que trariam melhores resultados por séries quase aleatórias, no que tange ao apreçamento de opções (MARINS; SANTOS; SALIBY, 2003).

Por outro lado, o interesse pela série de preços estudada, assim como pelo comparativo entre metodologias, é decorrente da motivação em testar a premissa de acuracidade no apreçamento de opções asiáticas, utilizando método

de Monte Carlo e Quasi-Monte Carlo, assim como do caráter investigativo sob a escassa abordagem da literatura quanto às opções asiáticas para o apreçamento de *commodities*, no Brasil.

## OBJETIVO DA ANÁLISE

O presente trabalho tem por objetivo comparar as metodologias de apreçamento de opções de *commodities*, utilizando o método de Monte Carlo e o método de Quasi-Monte Carlo, buscando mensurar qual destes melhor se adequaria aos cenários de alta volatilidade de preços do ativo base, no curto prazo (dois meses) e no longo prazo (dois anos), do ponto de vista de acurácia do preço e da discrepância dos dados.

Partiu-se do princípio de que a série de preços estudada segue um processo estocástico do tipo Movimento Geométrico Browniano (MGB), o qual foi comprovado por teste estatístico, onde o retorno e a volatilidade proporcionais do processo são constantes (DIXIT; PINDYCK, 1994).

Os métodos de amostragem foram escolhidos, devido a sua ampla utilização pela literatura disponível, no que tange ao apreçamento de opções de *commodities* (DENG; OREN, 2006), sobretudo em estudos realizados fora do Brasil e por se apresentarem mais eficientes na obtenção de séries preços com comportamento aleatório e discreto (JOY *et al.*, 1996).

## PROCESSOS E METODOLOGIA

Procurou-se, por meio de uma pesquisa do tipo quantitativa e empírico-analítica, realizar uma análise dos modelos matemáticos, a partir de uma amostra de preços de *commodities*, para inferir acerca do comportamento das séries de preços de *commodities*, cujo desempenho

seja semelhante do ponto de vista estocástico.

## Processo estocástico

Um processo estocástico do tipo  $X = \{X(t), t \in T\}$  é uma coleção de variáveis aleatórias (DIAS, 2009). Assim, para cada  $t$  no conjunto de índices  $T$ ,  $X(t)$  é uma variável aleatória. De forma geral,  $t$  é interpretado como tempo e  $X(t)$  é chamado de estado do processo no tempo  $t$ . Quando  $X(t)$  ocorre, é chamado de amostra de caminho (*sample path*). Quando o conjunto de índices  $T$  é um conjunto numerável, é dito que há um processo estocástico em tempo discreto. Por outro lado, se esse conjunto for medido em pontos que variam de forma contínua por meio do tempo, o processo será um processo estocástico contínuo.

A definição por Niederreiter (1988) seria: um processo estocástico é definido por uma lei de probabilidade de evolução da variável  $X(t)$ , a variável  $x$  a cada tempo  $t$ . Ou seja, para os tempos  $t_1 < t_2 < t_3$ , etc., é possível calcular a probabilidade correspondente aos valores  $x_1, x_2, x_3$ , etc, estarem em um intervalo específico, sendo  $\text{prob}(a_1 < x_1 \leq b_1, a_2 < x_2 \leq b_2, \dots)$ . Assim, quando o tempo  $t_1$  chegar e o atual valor de  $x_1$  for observado, é possível ter a condição de probabilidade de futuros eventos com essa informação. Um processo estocástico  $X(t)$  pode ser visto como uma previsão de  $E[X(t)]$  mais um erro dessa previsão, sendo, portanto:  $X(t) = E[X(t)] + \text{erro}(t)$ .

## Movimento Geométrico Browniano

O Movimento Browniano ou Processo de Wiener é um processo estocástico em tempo contínuo não estacionário, que assume três importantes propriedades: 1) é um processo de Markov (distribuição

de probabilidade dos valores futuros depende apenas do valor atual); 2) possui incrementos independentes de mudança ao longo do intervalo de tempo; 3) mudanças no processo em qualquer momento de um intervalo finito assumem uma distribuição normal, na qual a variância cresce linearmente com o tempo (DIXIT; PINDYCK, 1994). O processo de Wiener é descrito pela equação (1), a seguir:

$$dz = \epsilon_t \sqrt{dt} \quad (1)$$

Onde  $\epsilon_t$  é uma variável aleatória, não correlacionada, com distribuição normal, média zero e desvio padrão 1.

O processo estocástico, conhecido como Movimento Geométrico Browniano (MGB), é um dos casos particulares do Movimento Browniano aleatório, frequentemente utilizado para modelar variáveis de incerteza, como preços de ações, ativos financeiros, *commodities* e demandas de novos produtos, como visto em Paddock, Siegel e Smith (1988). Nesse processo, a variável  $x$  assume um padrão de crescimento ou decrescimento. Há ainda um caso específico de MGB, no qual o comportamento da série de dados apresenta tendência. A equação (2), a seguir, demonstra a base do MGB com tendência:

$$dx = \alpha x dt + \sigma x dz \quad (2)$$

Onde  $dz$  é o incremento da mudança,  $\alpha$  é o parâmetro de tendência de crescimento e  $\sigma$  o parâmetro da variância, sendo ambos constantes.

No MGB com tendência,  $x$  assume uma distribuição lognormal, sendo  $F(x) = \ln x$ , para tanto:

$$dF = \left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma dz \quad (3)$$

o qual, ao longo de um intervalo finito  $t$ , a mudança no logaritmo de  $x$  é normalmente distribuída com média  $(\alpha - 1/2\sigma^2)t$  e variância  $\sigma^2 t$ . Para  $x(0) = x_0$ , o valor esperado de  $x(t)$  é dado por:

$$E[x(t)] = x_0 e^{\alpha t},$$

e a variância de  $x(t)$  é dada por:

$$V[x(t)] = x_0^2 e^{2\alpha t} (e^{\sigma^2 t} - 1).$$

### Solução Analítica de Black & Scholes

Existem diferentes formas de negociação de opções asiáticas e para cada uma existem diversas propostas de apreçamento. Uma revisão da literatura sobre opções asiáticas pode ser encontrada em Milevsky e Posner (1998) e Neave e Ye (2000), ressaltando que somente aquelas que se baseiam na média geométrica é que possuem soluções analíticas fechadas dentro da estrutura do modelo de Black & Scholes (1973). Isso se deve, principalmente, ao fato de o *payoff*, no caso geométrico, depender da soma de variáveis lognormais correlacionadas. Como, para o caso aritmético, esse princípio não se aplica, não haveria função de distribuição de probabilidade reconhecível.

No caso das opções asiáticas definidas em bases aritméticas, somente existem soluções aproximadas para o valor do prêmio. Contudo, Hull (1999) considera que a solução geométrica de Black & Scholes é uma solução aceitável para o cálculo do prêmio das opções asiáticas. Desse modo, como forma de comparação dos resultados obtidos pelos modelos de Monte Carlo e Quase-Monte Carlo, foi utilizada a solução geométrica de Black & Scholes.

### O Método de Monte Carlo

De maneira geral, o método de Monte Carlo pode ser descrito como um método numérico, em que o valor a ser calculado é interpretado como um modelo estocástico e, de forma subsequente, é estimado por amostra aleatória. Uma característica importante para aplicação do método de Monte Carlo é a utilização de amostras aleatórias apropriadas, do ponto de vista do quanto as amostras refletem a verdadeira aleatoriedade (HULL, 1999).

O método de Monte Carlo pode ser expresso numericamente conforme se vê a seguir, primeiramente calculando  $\int_B f(u)du$ , com a integral no domínio  $B \subseteq R^s$  satisfazendo  $0 < \lambda_s(B) < \infty$ , onde  $\lambda_s$  denota a medida de dimensão  $s$  de Lebesgue, para transformar  $B$  em um espaço de probabilidade com medida de probabilidade  $du^* = du / \lambda_s(B)$ . Então para  $f \in L^1(u^*)$ , temos:

$$\int_B f(u)du = \lambda_s(B) \int_B f(u^*) = \lambda_s(B)E(f) \tag{4}$$

onde  $E(f)$  é o valor esperado da variável aleatória  $f$ . O desafio da integração numérica é reduzir o problema da aproximação de cálculo de um valor esperado. Por outro lado, pode ser adotada a ideia básica da estatística, de estimar um valor esperado pela média da amostra.

A estimativa de Monte Carlo para o valor esperado  $E(f)$  é obtida tomando  $N$  amostras independentes de  $\lambda$  distribuídos aleatoriamente de  $a_1, \dots, a_N \in A$ , sendo:

$$E(f) \approx \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(a_n) \tag{5}$$

Para a análise de probabilidade dos

erros da estimativa (5), é necessária a variância:

$$\sigma^2(f) = \int_A (f - E(f))^2 d\lambda \tag{6}$$

que é finita quando  $f \in L^2(\lambda)$ .

Se  $f \in L^2(\lambda)$ , então para qualquer  $N \geq 1$ , utilizando (5) e (6), temos:

$$\int_A \dots \int_A \left( \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(a_n) - E(f) \right)^2 d\lambda(a_1) \dots d\lambda(a_N) = \frac{\sigma^2(f)}{N} \tag{7}$$

Sendo assim,  $f \in L^2(\lambda)$  pode ser interpretado no sentido que o valor absoluto do erro em (5), é em média  $\sigma(f)N^{-1/2}$  onde  $\sigma(f) = (\sigma^2(f))^{1/2}$  é o desvio padrão de  $f$ . Além disso, a informação probabilística sobre o erro é obtida do teorema do limite central, o qual atesta que, se  $0 < \sigma(f) < \infty$ , então:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{Prob} \left( \frac{c_1 \sigma(f)}{\sqrt{N}} \leq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(a_n) - E(f) \leq \frac{c_2 \sigma(f)}{\sqrt{N}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{c_1}^{c_2} e^{-t^2/2} dt \tag{8}$$

Se for aplicada a estimativa estatística (5) para o problema original de aproximação de cálculo para a integral  $\int_B f(u)du$ , então, se obtém a estimativa de Monte Carlo:

$$\int_B f(u)du \approx \frac{\lambda_s(B)}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n) \tag{9}$$

onde  $x_1, \dots, x_n$  são  $N$  amostras aleatórias independentes de  $B$  distribuídas em  $\mu$ . Pela análise acima, o valor absoluto do erro em (9) é, em média,  $\lambda_s(B)\sigma(f)N^{-1/2}$ . Sendo assim, com base no teorema do limite central, pode ser atestado que o método de Monte Carlo para integrais numéricas retorna um erro probabilístico limitado da forma  $N^{-1/2}$  em termos do número  $N$  de nós. Nesse caso, a ordem

de magnitude não depende da dimensão  $s$ . Este precisa ser comparado com o limite de erro  $N^{-2/s}$  para a regra clássica de integral dimensional  $s$ . O método de Monte Carlo para integrais numéricas, na visão de Niederreiter (1988), é definitivamente melhor do que a regra clássica de integral para dimensões  $s \geq 5$ .

A descrição do procedimento do método de Monte Carlo para integrais numéricas traz um melhor entendimento do método de maneira geral. O primeiro passo consiste em modelar a estatística de um dado problema numérico, geralmente em termos de variáveis aleatórias. De forma subsequente, as variáveis aleatórias no modelo precisam ser analisadas, considerando suas propriedades estatísticas (distribuição, dependência ou independência, etc). Outro passo importante é a geração de amostras aleatórias que reflitam essas propriedades estatísticas, realizadas o maior número possível de vezes, para que aumente a confiabilidade dos resultados do ponto de vista estatístico. Esta etapa do método de Monte Carlo é classificada como de simulação estocástica.

Por outro lado, segundo Niederreiter (1988), uma análise detalhada dos dados revela que, além da aleatoriedade da amostra, a dispersão dos dados precisa ser uniformemente distribuída, sob o domínio da integral. Segundo o autor, o método não traria garantias de que a exatidão esperada seria atingida para um cálculo concreto. Além disso, o limite do erro de forma determinística pode ser estabelecido se nós determinísticos são usados. A taxa de convergência se torna mais rápida quando aumenta o número de nós em regras de integrais construídas. Isso porque a utilização dos

nós determinísticos levaria a uma menor dispersão dos erros. Essa ideia expressa, de forma geral, os princípios fundamentais do método de Quasi-Monte Carlo, que é considerado a versão determinística do método de Monte Carlo.

### O Método Quasi-Monte Carlo

O objetivo do método Quasi-Monte Carlo, para integrais numéricas, é construir conjuntos de nós que se comportem significativamente melhor em média, ou seja, que sejam determinísticos de tal forma que o limite do erro também seja determinístico. Dessa forma, o método Quasi-Monte Carlo pode ser descrito como um método de sequências quase aleatórias ou como a versão determinística do método de Monte Carlo, para o qual  $x_1, x_2, \dots$  é uniformemente distribuído em  $I^s$  se:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N c_j(x_n) = \lambda_s(J) \quad (10)$$

Nesse modelo, a distribuição empírica está próxima da distribuição uniforme em  $I^s$ . Dessa forma, os nós precisam estar uniformemente distribuídos em  $I^s$ . As diversas formas de discrepância consideradas são medidas quantitativas para os desvios da distribuição uniforme.

O método Quasi-Monte Carlo compreende a geração de números uniformemente distribuídos, com sequências de vetores de dimensão  $s$  ou, melhor dizendo, que preenchem espaço de dimensão  $s$ , de maneira mais uniforme do que pontos aleatórios decorrelacionados, como no caso de Monte Carlo. As sequências são escolhidas deterministicamente, de forma a apresentar pontos que se distanciem ao máximo uns dos outros.

Entre as seqüências de baixa discrepância encontram-se as de Halton, de Faure e a de Sobol (MAIALI, 2000).

**Discrepância**

A discrepância é uma medida de desvio em relação uniformidade (TRAUB; PAPAGEORGIOU, 1996). A discrepância de uma série de dados, de maneira geral, mede a uniformidade da seqüência. Matematicamente, a discrepância é definida pela Fórmula 11, a seguir:

$$D_N = \sup_{Q \in I^s} \left| \frac{V \text{ de pontos em } Q}{N} - v(Q) \right| \quad (11)$$

Onde:

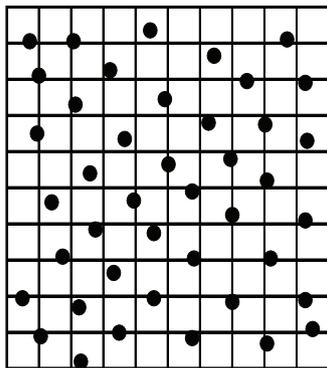
$N$  – é o número de pontos da amostra numérica ou tamanho da série;

$I^s$  - é o cubo unitário  $s$ -dimensional no universo estudado;

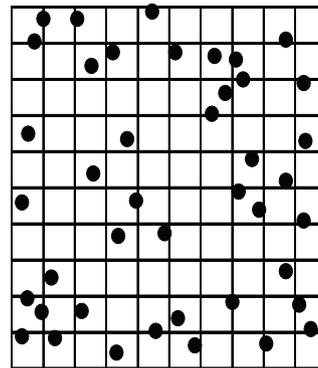
$v(Q)$  – é o volume de uma sub-região  $Q$  no cubo unitário  $I^s$ .

Para ilustrar graficamente a discrepância, foram realizados experimentos bidimensionais ordenados, distribuídos em um quadrado unitário.

Na FIG. 1, a seguir, cada eixo possui 42 pontos gerados por algoritmos que produzem séries distintas de baixa discrepância. Já na FIG. 2, os pares em ambos os eixos possuem 42 pontos, gerados em amostragem aleatória simples. Considerando as mesmas sub-regiões no quadrado unitário, a discrepância para a FIG. 1 foi de 3% e para a FIG. 2 foi de 5%.



**FIGURA 1 – Baixa Discrepância**



**FIGURA 2 – Amostra Aleatória Simples**

Fonte: SALIBY; MOREIRA, 2008.

**Limites para o Erro**

Os limites de erro de um conjunto de pontos de baixa discrepância garantem

menores erros pela integral de *Quasi-Monte Carlo*. Se  $f$  é contínuo em  $I^s$ , então, para qualquer  $x_1, \dots, x_N \in I^s$ , tem-se:

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n) - \int_{I^s} f(u) du \right| \leq 4\omega \left( f; D_N^*(x_1, \dots, x_N)^{1/s} \right) \quad (12)$$

Considerando um domínio mais geral de integral limitada, pode-se assumir que o domínio da integral  $B$  que está contido em  $I^s$  é convexo e  $f$  tem variação limitada  $V(f)$  em  $I^s$ , então, para cada conjunto de pontos  $P$  de  $x_1, \dots, x_N \in I^s$ , tem-se:

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n) - \int_{I^s} f(u) du \right| \leq (V(f) + |f(1, \dots, 1)|) J_N(P) \tag{13}$$

A maneira mais satisfatória de se produzir sequências de baixa discrepância em qualquer dimensão é pelo entendimento da sequência de *van der Corput* (NIEDERREITER, 1988), a qual pertence ao mesmo padrão da sequência de *Halton*. Para uma dada dimensão  $s \geq 1$ , deixar  $b_1, \dots, b_s$  ser inteiro  $\geq 2$ . Assim, usando a função inversa  $\varphi_b$ , a sequência de *Halton* é definida na base  $b_1, \dots, b_s$ , como a sequência  $x_0, x_1, \dots$  com:

$$x_n = (\varphi_{b_1}(n), \dots, \varphi_{b_s}(n)) \in I^s \text{ para todo } n \geq 0$$

Para  $s=1$  a definição se reduz a uma sequência de *van der Corput*. Se  $S$  é uma sequência de *Halton* numa base de par ordenado de números primos  $b_1, \dots, b_s$ , então:

$$D_N^*(S) < \frac{s}{N} + \frac{1}{N} \prod_{i=1}^s \left( \frac{b_i - 1}{2 \log b_i} \log N + \frac{b_i + 1}{2} \right) \text{ para todo } N \geq 1 \tag{14}$$

A sequência de *Halton* continua a ser um dos métodos mais populares de sequência de baixa discrepância e pode ser produzida com um simples algoritmo, o qual depende de um conjunto de números primos tomados como base para a construção do seu componente vetor (SCHLIER, 2008). Normalmente, com o objetivo de se atingir maior eficiência, os menores números primos são utilizados.

O padrão de discrepância de Halton pode ser constatado pela Fórmula 14, a seguir:

$$D^* \alpha C(s) \log(N)^s / N \tag{15}$$

### Opções Asiáticas

As opções asiáticas são opções exóticas em que o *payoff* depende da média aritmética do preço do ativo-objeto da opção ou do preço de exercício da opção. O *payoff* pelo preço médio do ativo-objeto é dado por  $\max(\overline{S}_T - K, 0)$  e  $\max(K - \overline{S}_T, 0)$  para opção de compra e venda, respectivamente. Onde  $K$  é o preço de exercício e  $\overline{S}_T$  é o preço médio do ativo em questão, na data de exercício  $T$ . No caso do preço de exercício médio, esses são caracterizados pelo *payoff*:  $\max(S_T - \overline{S}_T, 0)$  e  $\max(\overline{S}_T - S_T, 0)$ , para compra e venda da opção, respectivamente, onde  $S_T$  é o preço do ativo na data de exercício  $T$ .

Neste artigo, foi considerado que o prêmio da opção será calculado sobre a média aritmética do preço do ativo-objeto, sendo assim o preço de exercício fixo.

Considerando que as opções asiáticas, com séries de dados em tempo contínuo, são substituídas por processos em tempo discreto usando  $s$  uniformemente distribuído em etapas, na data  $T$ , dependendo apenas do preço  $A_1, A_2, \dots, A_s$ , tem-se:

$$0 \leq t_1, t_2, \dots, t_s \leq T$$

Assumindo que os incrementos de preço são independentes e tomando o *payoff* esperado pela taxa neutra ao risco, transforma-se a integral:

$$\text{Preço} = \int_{I^s} f(x) dx, \text{ onde } I^s = [0, 1)^s.$$

### Evento e Amostra

Para o cálculo do preço das opções, foram utilizadas séries mensais de preços nominais do etanol, divulgados pelo Centro de Estudos Avançados em Economia Aplicada (CEPEA), compreendendo 133 períodos. Para a série de Etanol, foi considerado o preço ponderado do álcool Anidro e do Hidratado, de acordo com os respectivos percentuais médios de produção. A análise se restringiu ao período de agosto de 1998 a agosto de 2009, devido à disponibilidade de dados

mensais encontrada. Nessa etapa, foi utilizado o *Microsoft Excel* e *software Eviews* para tratamento dos dados.

### A Análise da Série Histórica e Tratamento dos Dados

Conforme a FIG. 3, a seguir, observa-se uma tendência de crescimento nos preços, com picos de oscilação periódicos, com o etanol saindo de um patamar de R\$ 0,38/litro no fechamento de maio de 1998 e alcançando R\$ 0,78/litro em maio de 2009. A média de preços do etanol é de R\$ 0,65/litro, com variância de 0,1155.

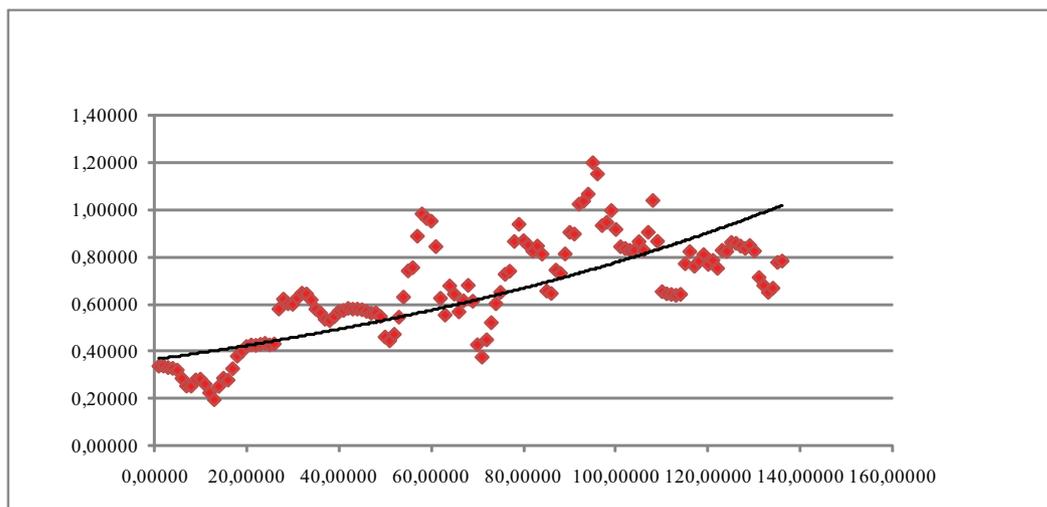


**FIGURA 3 – Série Mensal de Preços do Etanol**

Fonte: Elaboração própria, com dados extraídos do site do Centro de Estudos Avançados em Economia Aplicada (CEPEA).

Outro ponto importante quanto à análise das séries estudadas está relacionado à aleatoriedade dos dados. Como pode ser observado na FIG. 4, a série parece apresentar aleatoriedade

dos dados e tendência, com a variância aumentando linearmente com o intervalo de tempo, o que a princípio poderia representar indícios de um MGB. Esta hipótese será testada no item seguinte.



**FIGURA 4 – Dispersão da Série de Preços de Etanol**

Fonte: Elaboração própria, com dados extraídos do site do Centro de Estudos Avançados em Economia Aplicada (CEPEA).

### A Validade do Processo Estocástico

Para testar se o modelo pode ser utilizado na modelagem de uma variável estocástica, é necessário aferir a validade de o modelo ser um MGB. O MGB é um processo estocástico que pode conter uma ou mais raízes unitárias, o que indica a não estacionaridade do comportamento da série histórica, ou seja, os valores tendem a aumentar com o transcorrer do tempo. A série pode ser testada para a presença de raiz unitária, por meio de uma regressão linear por mínimos quadrados e aplicando-se um teste de *Dickey e Fuller* (DICKEY; FULLER, 1981).

Para tanto, faz-se a regressão da equação  $x_t = a + bx_{t-1} + \varepsilon_t$ , verificando-se a hipótese nula de  $b=1$ , na qual a série teria uma raiz unitária, e, portanto, poderia ser modelada por um MGB. A estatística  $t$  do teste de *Dickey e Fuller* indica que, para valores menores do que  $-3,44$ , a hipótese nula seria rejeitada.

Sendo assim, ao realizar o teste por meio do *software Eviews*, conforme resultados da TAB. 1, verificou-se que, para a série de preços de etanol avaliada, não foi possível rejeitar a hipótese nula de que a série tem, ao menos, uma raiz unitária para um nível de significância de 5%.

**TABELA 1 - Resultado do Teste de Raiz Unitária**

<b>Teste Dickey-Fuller</b>	<b>-3,44</b>
Nível Significância	5%
Valores Críticos	<b>-2,87</b>

Fonte: Elaboração própria.

Sendo assim, pode-se considerar que a série assume um padrão do tipo passeio aleatório, não estacionário. Por simplificação do estudo, foi considerado que a série de dados assume o padrão de um MGB apenas no intervalo de tempo considerado, sem que se possam assumir mais premissas para o modelo fora deste intervalo de tempo.

## PROCEDIMENTOS DE ESTIMAÇÃO

### Retornos Esperados

As séries de dados utilizadas neste trabalho foram os preços do etanol, de maio de 1998 a agosto de 2009, com base mensal. De posse desses dados, foi calculado o logaritmo neperiano dos retornos de ambas as *commodities* por:

$$X(t) = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)$$

Foi necessário utilizar a série de retornos, pois o cálculo da volatilidade deve ser feito por meio dessa série, como se verá a seguir.

Os retornos dos preços da série analisada foram calculados, conforme a fórmula descrita, por meio do logaritmo natural do quociente entre os preços de fechamento e o mês anterior. O retorno médio do etanol foi de 0,62%, chegando a 83,9% no período total da amostra.

### Volatilidade ( $\sigma$ )

Para cada mês de referência, foi calculado um valor de variância dos retornos. Para o cálculo da volatilidade mensal ( $\sigma_{mensal}$ ), foi encontrado o desvio padrão dos retornos da série  $X(t)$ , com dados entre o primeiro dia útil e o último dia útil do mês anterior ao mês de referência. A volatilidade anual foi calculada pela fórmula:  $\sigma_{anual} = \sigma_{mensal} * raiz(12)$ . A volatilidade anual encontrada para a série de etanol no período considerado foi de 35,10%.

### Tempo até o vencimento ( $T$ )

O tempo até o vencimento foi calculado considerando o número de dias úteis do intervalo entre o primeiro dia útil do mês de referência e o dia útil anterior à data de vencimento do cenário em análise. Calcula-se, com base no dia útil anterior à data de vencimento, pois é o preço de fechamento desta data que define o preço de exercício da opção.

### Taxa de juros ( $r_f$ )

A taxa de juros foi calculada em 10,8% ao ano, utilizando-se o parâmetro de crescimento, de forma que a taxa de desconto, ajustada ao risco, fosse convertida em taxa neutra ao risco  $r$ .

## Inclinação ( $\alpha$ )

Para o cálculo da inclinação das curvas de preços das *commodities*, foi utilizada a função inclinação do *Excel*, o qual retorna a inclinação da linha de regressão linear por meio de pontos de dados em "val\_conhecidos\_y e val\_conhecidos\_x". A inclinação é a distância vertical dividida pela distância horizontal entre dois pontos quaisquer na linha, que é a taxa de mudança ao longo da linha de regressão. Em outras palavras, é encontrado o coeficiente angular entre a variância da série e a própria série de preços.

Primeiramente, foi calculada a inclinação mensal com base na média dos retornos  $X(t) = \ln(P_t/P_{t-1})$ , somada ao quadrado da volatilidade ( $\sigma$ ), dividido por 2. Em seguida, é feito o cálculo da inclinação anual, multiplicando-se a volatilidade mensal por 12 meses.

## Procedimento de Teste

Foram criados cenários para facilitar o tratamento dos resultados e contribuir com conclusões sobre os métodos de amostragem estudados. Para facilitar a visualização dos resultados, a série de dados que fora observada originalmente em R\$/litros, passou a ser considerada em R\$/m<sup>3</sup>.

O método de amostragem utilizado para avaliar a série de preços é o método de Monte Carlo com amostragem aleatória simples e o método de *Quasi-Monte Carlo*, por meio de séries de baixa discrepância de *Halton*.

Este artigo considera opções de compra asiáticas em três situações distintas: fora do dinheiro, no dinheiro, e dentro do dinheiro e diferentes cenários de volatilidade.

Nas aplicações do teste, as séries de baixa discrepância foram obtidas pelo método de *Quasi-Monte Carlo Halton*. Isso porque, segundo este método, cada variável de entrada é associada a um número primo na primeira corrida e recebe como amostra a série de *Quasi-Monte Carlo* correspondente a esse primo. Nas corridas que se sucedem, a variável recebe permutações simples da série utilizada na primeira corrida. Não ocorre alteração nos valores das amostras, sendo tidos como conjuntos determinísticos.

Para as simulações do apereçamento das opções asiáticas pelos métodos de Monte Carlo e *Quasi-Monte Carlo* foi usado o programa *Matlab*, no qual o apereçamento das opções foi descrito em linguagem de programação. Para o apereçamento das opções asiáticas por *Black e Scholes*, foi utilizado o programa em *Excel DerivaGem* Versão 2.0, pois, segundo Hull (1999), os prêmios calculados para as opções asiáticas, por meio de médias geométricas pelo modelo de *Black e Scholes*, são uma aproximação eficiente para a solução aritmética exigida.

No experimento 1 (TAB. 2), foi realizada uma comparação entre os métodos de *Black e Scholes*, Monte Carlo e *Quasi-Monte Carlo*, para apereçamento de opções asiáticas, considerando preço inicial de R\$ 781/m<sup>3</sup>; a taxa de juros livre de risco admitida foi de 10.8% a.a., volatilidade variando entre 25%, 35% (estimada pela série de preços) e 45%, vencimento em 2 meses, número de nós de 24, número de rodadas de 10.000 e preços de exercício de R\$ 581/m<sup>3</sup> dentro do dinheiro, R\$ 781/m<sup>3</sup> no dinheiro e R\$981/m<sup>3</sup> fora do dinheiro.

Para o experimento 2 (TAB. 3), buscou-se alongar o prazo de vencimento

das opções para dois anos, mantendo os demais parâmetros de volatilidade, taxa de juros, preço na data zero, nós e preço de exercício.

## RESULTADO DO TESTE

### Experimento 1

Os resultados encontrados no experimento 1, TAB. 2, para os prêmios das opções asiáticas foram, conforme esperado, maiores para os preços de exercício com valores dentro do dinheiro e maior volatilidade, e menores conforme

os preços de exercício aumentavam em relação ao preço inicial ou a volatilidade era reduzida. No caso do preço de exercício R\$581,00 (dentro do dinheiro), um aumento da volatilidade não gerou um aumento no valor do prêmio, conforme o esperado para a volatilidade de 45%, no modelo de *Quasi-Monte Carlo*, e para a volatilidade de 35%, para o modelo de Monte Carlo. Contudo, esses valores não são diferentes dos obtidos com o modelo de *Black e Scholes* e, portanto, foram considerados como válidos.

**TABELA 2 - Prêmios de opções de compra para um prazo de 42 dias úteis, 10.000 simulações por rodada**

Preço de Exercício	Prêmios das Opções de Compra									Diferença					
	Asiática pro B&S			Asiática por MC			Asiática por QMC			B&S/MC			B&S/QMC		
	$\sigma_1=25$ %	$\sigma_2=35$ %	$\sigma_3=45$ %	$\sigma_1=25$ %	$\sigma_2=35$ %	$\sigma_3=45$ %	$\sigma_1=25$ %	$\sigma_2=35$ %	$\sigma_3=45$ %	$\sigma_1=25$ %	$\sigma_2=35$ %	$\sigma_3=45$ %	$\sigma_1=25$ %	$\sigma_2=35$ %	$\sigma_3=45$ %
K1=581	203,21	203,21	203,25	203,49	203,15	204,10	202,96	202,96	202,38	0,14	0,03	0,42	0,12	0,12	0,43
K2=781	21,66	28,88	36,13	22,06	29,80	37,76	22,06	29,27	36,47	1,85	3,17	4,49	1,86	1,33	0,94
K3=981	0,00	0,09	0,66	0,00	0,12	0,91	0,00	0,05	0,59	101,09	40,01	38,50	27,61	42,71	10,48

**Nota.** Prêmios das opções de compra do tipo asiática calculados segundo os modelos de *Black e Scholes* (B&S), Monte Carlo (MC) e Quasi-Monte Carlo-Halton (QMC). Foram estimados o nove prêmios para cada um dos modelo, os quais são diferenciados pelos valores dos parâmetros: preço inicial (S0) de R\$ 781/m<sup>3</sup>, preços de exercício (K) de R\$ 581/m<sup>3</sup> (dentro do dinheiro), R\$ 781/m<sup>3</sup> (no dinheiro) e R\$ 981/m<sup>3</sup> (fora do dinheiro); taxa de juros livre de risco de 10.8% a.a. e três cenários de volatilidade ( $\sigma$ ) de 25%, 35% (estimada para a série de preços) e de 45%. Os preços do ativo-objeto foram simulados até a data de vencimento das opções, num total de 42 dias úteis, 24 nós, considerando 10.000 observações por rodada. A diferença entre o modelo de *Black e Scholes* e os modelos de Monte Carlo (MC) e o de Quasi-Monte Carlo (QMC) é a razão

### Experimento 2

No experimento 2, TAB. 3, foram alterados os prazos de vencimento do preço de exercício para dois anos e mantidas todas as demais variáveis. Os valores obtidos para os prêmios das opções asiáticas, conforme o esperado, foram de prêmios maiores, para os valores com preços de exercício menores e valores de

volatilidade maiores. Conforme o preço de exercício aumentava ou a volatilidade era reduzida, os valores dos prêmios também se reduziram. Os valores dos prêmios obtidos com os modelos de Monte Carlo e *Quasi-Monte Carlo* são muito próximos dos prêmios encontrados com a solução de *Black e Scholes*, considerada como a solução correta.

**TABELA 3 - Prêmios de opções de compra para um prazo de 504 dias úteis, 10.000 simulações por rodada**

	Prêmios das Opções de Compra									Diferença					
	Asiática pro B&S			Asiática por MC			Asiática por QMC			B&S/MC			B&S/QMC		
Preço	$\sigma_1=25$	$\sigma_2=35$	$\sigma_3=45$	$\sigma_1=25$	$\sigma_2=35$	$\sigma_3=45$	$\sigma_1=25$	$\sigma_2=35$	$\sigma_3=45$	$\sigma_1=25$	$\sigma_2=35$	$\sigma_3=45$	$\sigma_1=25$	$\sigma_2=35$	$\sigma_3=45$
Exercício	%	%	%	%	%	%	%	%	%	%	%	%	%	%	%
K1=581	234,19	239,78	249,61	240,18	242,24	254,94	235,75	239,16	246,18	2,56	1,03	2,14	0,67	0,26	1,37
K2=781	97,95	118,77	140,64	102,89	122,21	141,03	100,50	119,52	138,90	5,04	2,90	0,27	2,61	0,63	1,24
K3=981	27,12	49,64	73,68	31,45	54,51	77,31	29,21	51,13	73,49	15,99	9,81	4,92	7,73	3,01	0,27

**Nota.** Prêmios das opções de compra do tipo asiática calculados segundo os modelos de *Black e Scholes (B&S)*, Monte Carlo (MC) e Quasi-Monte Carlo-Halton (QMC). Foram estimados o nove prêmios para cada um dos modelo, os quais são diferenciados pelos valores dos parâmetros: preço inicial (S0) de R\$ 781/m<sup>3</sup>, preços de exercício (K) de R\$ 581/m<sup>3</sup> (dentro do dinheiro), R\$ 781/m<sup>3</sup> (no dinheiro) e R\$ 981/m<sup>3</sup> (fora do dinheiro); taxa de juros livre de risco de 10.8% a.a. e três cenários de volatilidade ( $\sigma$ ) de 25%, 35% (estimada para a série de preços) e de 45%. Os preços do ativo-objeto foram simulados até a data de vencimento das opções, num total de 504 dias úteis, 24 nós, considerando 10.000 observações por rodada. A diferença entre o modelo de *Black e Scholes* e os modelos de Monte Carlo (MC) e o de Quasi-Monte Carlo (QMC) é a razão de  $((MC/B\&S)-1)*100$  ou  $((QMC/B\&S)-1)*100$ .

### Avaliação da redução da variância entre os modelos de Monte Carlo e Quasi-Monte Carlo

A redução da variância entre os modelos de Monte Carlo e Quasi-Monte Carlo foi testada por meio do cálculo da variação dos preços dos prêmios obtidos em cada um dos nove cenários simulados para cada modelo. Em todos os cenários simulados, conforme resultados das TAB. 4 e 5, os intervalos de confiança para os prêmios das opções asiáticas, com 5% de

significância, foram menores em relação ao modelo de *Quasi-Monte Carlo* do que em relação ao modelo de Monte Carlo.

Na TAB. 5, a redução relativa da variância foi mais forte para os cenários com maior volatilidade e preços de exercício maiores. Nos cenários com volatilidade de 25% e 35%, e com preço de exercício de R\$981,00, as variâncias obtidas com o modelo de *Quasi-Monte Carlo-Halton* foram aproximadamente a metade dos valores obtidos com o modelo de Monte Carlo.

**TABELA 4 - Variância nos prêmios das opções de compra para um prazo de 42 dias úteis, 10.000 simulações por rodada**

Variância nos Prêmios das Opções de Compra						
	Asiática por MC			Asiática por QMC-Halton		
Preço Exercício	$\sigma_1=25\%$	$\sigma_2=35\%$	$\sigma_3=45\%$	$\sigma_1=25\%$	$\sigma_2=35\%$	$\sigma_3=45\%$
K1=581	46,70	65,68	85,05	46,64	65,24	83,81
K2=781	30,87	42,73	56,94	30,23	41,93	53,96
K3=981	0,25	2,95	8,39	0,13	1,36	5,94

Variância dos prêmios das opções de compra do tipo asiática calculados segundo os modelos de Monte Carlo (MC) e *Quasi-Monte Carlo* (QMC-Halton). Foram calculadas as variâncias para cada um dos prêmios obtidos nos nove cenários simulados para cada modelo, os quais são diferenciados pelos valores dos parâmetros: preço inicial (S0) de R\$781/m3, preços de exercício (K) de R\$581/m3 (dentro do dinheiro), R\$781/m3 (no dinheiro) e R\$981/m3 (fora do dinheiro); taxa de juros livre de risco de 10.8% a.a. e três cenários de volatilidade ( $\sigma$ ) de 25%, 35% (estimada para a série de preços) e de 45%. Os preços do ativo-objeto foram simulados até a data de vencimento das opções, num total de 42 dias úteis, 24 nós, considerando 10.000 observações por rodada.

Nas simulações dos prêmios das opções de compra asiáticas, com prazo de dois anos até o vencimento (TAB. 5) os resultados das variâncias dos prêmios foram inferiores, em todos os cenários, no modelo de *Quasi-Monte Carlo-Halton*,

em relação ao modelo de Monte Carlo. A redução das variâncias dos prêmios das opções de compra foi mais evidente conforme o preço de exercício aumentava em relação ao preço inicial.

**TABELA 5 - Variância nos prêmios das opções de compra para um prazo de 504 dias úteis, 10.000 simulações por rodada**

Variância nos Prêmios das Opções de Compra						
	Asiática por MC			Asiática por QMC-Halton		
Preço Exercício	$\sigma_1=25\%$	$\sigma_2=35\%$	$\sigma_3=45\%$	$\sigma_1=25\%$	$\sigma_2=35\%$	$\sigma_3=45\%$
K1=581	153,53	211,04	282,06	149,32	205,20	260,69
K2=781	125,66	180,41	232,89	122,32	169,08	220,11
K3=981	78,04	127,37	185,94	71,14	118,41	170,58

Variância dos prêmios das opções de compra do tipo asiática calculados segundo os modelos de Monte Carlo (MC) e Quase-Monte Carlo (QMC-Halton). Foram calculadas as variâncias para cada um dos prêmios dos 9 cenários simulados para cada modelo, diferenciadas pelos valores dos parâmetros: preço inicial (S0) de R\$781/m<sup>3</sup>, preços de exercício (K) de R\$581/m<sup>3</sup> (dentro do dinheiro), R\$781/m<sup>3</sup> (no dinheiro) e R\$981/m<sup>3</sup> (fora do dinheiro); taxa de juros livre de risco de 10.8% a.a. e três cenários de volatilidade ( $\sigma$ ) de 25%, 35% (estimada para a série de preços) e de 45%. Os preços do ativo-objeto foram simulados até a data de vencimento das opções, num total de 504 dias úteis, 24 nós, considerando 10.000 observações por rodada.

## CONCLUSÃO

As opções asiáticas são utilizadas por agentes econômicos que precisam se proteger da variação média de um ativo durante um período de tempo pré-determinado. As opções asiáticas são menos caras do que as opções comuns e são mais apropriadas para quem precisa se defender das variações dos valores de um ativo ao longo de um período, e não para um valor específico.

Problemas como o das opções asiáticas, que exigem soluções aritméticas, são comumente solucionadas com a utilização de modelos estocásticos, sendo o de Monte Carlo um dos mais utilizados e conhecidos.

Buscou-se, neste trabalho, comparar a eficácia do apreçamento de opções

asiáticas do modelo de *Quasi-Monte Carlo-Halton* em relação ao modelo de Monte Carlo, pois o primeiro teria resultados mais robustos e com menor variância, por usar sequência de dados não aleatória.

Ao comparar as simulações quanto à redução relativa da variância, no modelo de *Quasi-Monte Carlo-Halton*, nos cenários com volatilidade acima de 25% e preços de exercício maiores (dois anos), as variâncias obtidas foram aproximadamente a metade dos valores obtidos com o modelo de Monte Carlo. Tal conclusão sobre as simulações leva a crer que o modelo de *Quasi-Monte Carlo-Halton*, de fato, apresenta melhores resultados quanto à redução relativa da variância de séries de preços

com alta volatilidade, o que poderia indicar o método como satisfatório para apreçamento de opções de *commodities*.

No entanto, essa conclusão não parece tão clara ao avaliar os valores obtidos pelas simulações dos *prêmios* das opções de compra asiática geradas pelos modelos de Monte Carlo e *Quasi-Monte Carlo*, os quais consideram média aritmética do preço do ativo, tendo sido muito próximos aos obtidos ao calcular os prêmios de opção pelo tradicional método de *Black e Scholes*, mesmo considerando

a visão recente de alguns autores, de que esse método somente traria resultados satisfatórios ao se basear na média geométrica para soluções analíticas fechadas.

Dessa forma, em trabalhos futuros, poderão ser abordados outros modelos de apreçamento e incorporadas novas técnicas de redução de variância que permitam identificar diferenças mais significativas entre os modelos porventura utilizados. 

## REFERÊNCIAS

---

- BLACK, F.; SCHOLES, M. The pricing of options and corporate liabilities. **The Journal of Political Economy**, [S. l.], v. 81, n. 3, p. 637-654, 1973.
- BOYLE, P. Options: A Monte Carlo approach. **Journal of Financial Economics**, [S. l.], v. 4, p. 323-338, 1977.
- BRANDIMARTE, P. **Numerical Methods in Finance and Economics**. 2<sup>nd</sup>. ed. New Jersey: Wiley InterScience, 2006.
- BRESSAN, A. A. A tomada de decisão em futuros agropecuários com modelos de previsão de séries temporais. **RAE-eletronica**, [S. l.], v. 3, n. 1, jan./jun. 2004.
- DENG, S. J.; OREN, S. S. Electricity derivatives and risk management. **Energy**, [S. l.], v. 31, n. 6-7, p. 940-953, 2006.
- DIAS, M. A. G. **Stochastic Processes with Focus in Petroleum Applications**. 2009. Retrieved from: <<http://www.puc-rio.br/marco.ind/stochast.html>>.
- DICKEY, D.; FULLER, W. Likelihood ratio statistics for autoregressive time series with a unit root. **Econometrica**, [S. l.], v. 49, p. 1057-1072, 1981.
- DIXIT, A. K.; PINDYCK, R. S. **Investment under Uncertainty**. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1994.
- HULL, J. C. **Options, Futures and Other Derivatives**. 4<sup>th</sup>. ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1999.
- JOY, C.; BOYLE, P. P.; TAN, K. S. Monte Carlo methods in numerical finance. **Management Science**, [S. l.], v. 42, n. 6, p. 926-938, 1996.
- MAIALI, A. C.; COSTA, O. L. V. **Método de diferenças finitas e de Monte Carlo em derivativos**. 2000. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) - Escola Politécnica. Universidade de São Paulo (USP), São Paulo, 2000.
- MARINS, J. T. M.; SANTOS, J. F.; SALIBY, E. Aplicação de técnicas de redução de variância para estimação do prêmio de opções de compra do tipo asiática. In: ENCONTRO BRASILEIRO DE FINANÇAS, 3., 2003, São Paulo. **Anais...** São Paulo: [s. n.], 2003.
- MARTINS, T. M. **Ciclos e Previsão Cíclica dos Preços das Commodities: um modelo de indicador antecedente para a commodity açúcar**. 2009. Tese (Doutorado em Administração) - Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade. Universidade de São Paulo (USP), São Paulo, 2009.
- METROPOLIS, N.; ULAM, S. The Monte Carlo Method. **Journal of the American Statistical Association**, [S. l.], v. 44, n. 247, p. 335-341, 1949.
- MILEVSKY, M. A.; POSNER, S. E. Asian options, the sum of lognormals, and the reciprocal gamma distribution. **Journal of Financial and Quantitative Analysis**, [S. l.], v. 33, n. 3, p. 409-422, 1998.
- NEAVE, Edwin H.; YE, George L. **Pricing Asian Options Using**

**Path Bundling.** 2000. Available at SSRN: <<http://ssrn.com/abstract=284888> or <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.284888>>.

NIEDERREITER, H. Low-discrepancy and low-dispersion sequences. **Journal of Number Theory**, [S. l.], v. 30, n. 1, p. 51-70, 1988.

NIEDERREITER, H. **Random number generation and Monte Carlo methods.** Paper presented at the Regional Conference Series in Applied Mathematics, 1992.

PADDOCK, J. L.; SIEGEL, D. R.; SMITH, J. L. Option valuation of claims on real assets: the case of offshore petroleum leases.

**Quarterly Journal of Economics**, [S. l.], v. 103, p. 479-508, 1988.

SALIBY, E.; MOREIRA, F. F. P. **Estudo comparativo dos métodos de quasi-monte carlo, amostragem descritiva, hipercubo latino e monte carlo clássico na análise de risco.** Rio de Janeiro: COPPEAD – UFRJ,

[201-]. Disponível em: <<http://hdl.handle.net/10438/1080>>. Acesso em: 16 nov. 2010.

SCHLIER, C. On scrambled Halton sequences. **Applied Numerical Mathematics**, [S. l.], v. 58, n. 10, p. 1467-1478, 2008.

TRAUB, J. F.; PAPAGEORGIOU, A. New results on deterministic pricing of financial derivatives. Princeton, NJ: **Mathematical Problems in Finance** - Institute for Advanced Study, 1996.