AS SEÇÕES CÔNICAS NA ENGENHARIA CIVIL

Fernando Henrique Espíndola Reis – (FEA/FUMEC)
nando@fea.fumec.br

João Mário Andrade Pinto – Engenheiro Civil, Doutor em Ciências na Área de Tecnologia Nuclear pela USP, Professor da Universidade FUMEC

RESUMO

As curvas cônicas têm sido estudadas desde a antiguidade por matemáticos influentes em sua época como Euclides e Apolônio. No início, estas curvas planas eram estudadas por simples curiosidade, sem muitas pretensões de aplicações práticas. No entanto com o passar do tempo e o desenvolvimento de áreas do conhecimento como a física, a astronomia, a engenharia e a própria matemática, surgiram aplicações práticas importantes para estas curvas. Como exemplo pode-se citar as órbitas elípticas dos planetas em torno do sol, bem como as características reflexivas destas curvas largamente utilizadas na indústria em geral. Neste trabalho será feito um breve resgate da história destas curvas, a descrição de suas equações matemáticas e uma consideração a respeito da possibilidade da utilização das propriedades físicas destas curvas planas como solução estrutural e/ou estética em obras de arte de engenharia civil.

Palavras-chave: Obras de Arte; Solução estrutural; Seções Cônicas.

ABSTRACT

The conics curves has been studied since the antiquity by well know mathematicians in that time, like Euclides and Apolônio. In the beginning, those plain curves, were studied by simple curiosity, without no much pretensions of practical applications. By the way with the time and development of knowledge areas such as physics, astronomy, engineering and math itself, important practical applications came up to those curves, for example, can say about the elliptical orbits of the planets around the sun, such as reflexive characteristics of those curves, extensive used in industries in general. In these article, a brief recovering of those conics curves, will be showed, with the description of the mathematics equations, and a short topic about the consideration of physical properties utilization of those plain curves as structural solution and/or esthetic of engineering works.

Keywords: *Engineering works, Structural solution, Conics sections.*

HISTÓRIA

As curvas cônicas são conhecidas e estudadas a muitos séculos. Os trabalhos mais antigos sobre o assunto foram feitos por Menaechmo, Aristeu e Euclides. Mas foi Apolônio, conhecido como “O Grande Geômetra” que nasceu por volta de 262ac em Perga, no sul da Ásia Menor e morreu por volta de 190ac em Alexandria, que desenvolveu um estudo mais completo e detalhado sobre as seções cônicas. Sua grande obra Seções Cônicas supera completamente os trabalhos anteriores sobre o assunto (EVES, 1997).

> *“Antes de Apolônio os gregos tiravam as cônicas de três tipos de cones de revolução, conforme o ângulo do vértice da seção meridiana fosse menor que, igual a, ou maior que um ângulo reto. Seccionando-se cada um desses tipos de cones com um plano perpendicular a uma geratriz resultam respectivamente uma elipse, uma parábola e uma hipérbole. Só se considerava um ramo da hipérbole. Apolônio porém, no livro I de seu tratado, obtinha todas as seções cônicas da maneira hoje familiar, ou seja, a partir de uma cone circular duplo, reto ou oblíquo” (EVES, 1997).*

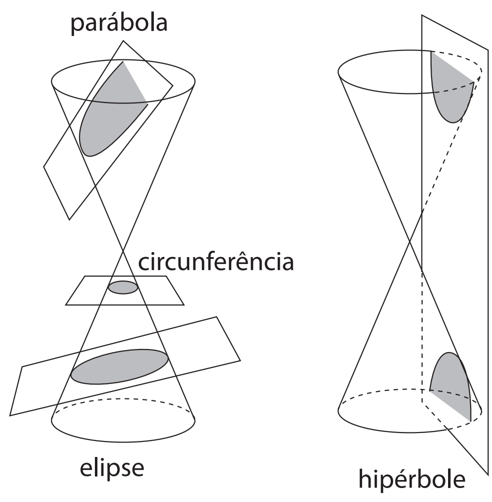


FIGURA 1 – Seções cônicas não degeneradas.

NA FIG. 1 vê-se a obtenção das seções cônicas como descrito. A circunferência também pode ser considerada uma cônica pois pode ser obtida quando um plano secciona um cone reto perpendicularmente ao seu eixo e, existem ainda, as chamadas cônicas degeneradas que ocorrem quando o plano intercepta o cone em seu vértice e dependendo de seu ângulo surgem um ponto, uma reta ou duas retas concorrentes.

Porém neste trabalho serão abordadas a elipse, a hipérbole e a parábola.

Winterle (2000), descreve como obter uma “superfície cônica” a partir de duas retas (ver FIG. 2). “Sejam duas retas **e** e **g** concorrentes em **o** e não-perpendicualares. Conservemos fixa a reta **e** e façamos **g** girar 360 graus em torno de **e** mantendo constante o ângulo entre estas retas. Nestas condições, a reta **g** gera uma superfície cônica circular infinita formada por duas folhas separadas pelo vértice **o**.”

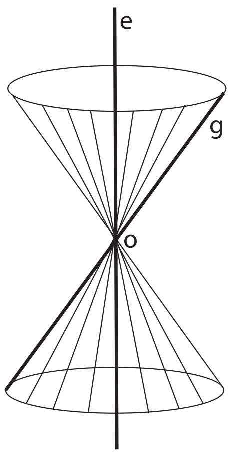


FIGURA 2 – Superfície cônica

No início os matemáticos estudavam estas elegantes curvas sem maiores preocupações com aplicações práticas. Mas ao longo do tempo inúmeras descobertes importanets em matemática pura e na ciência em geral estavam ligadas às seções cônicas.

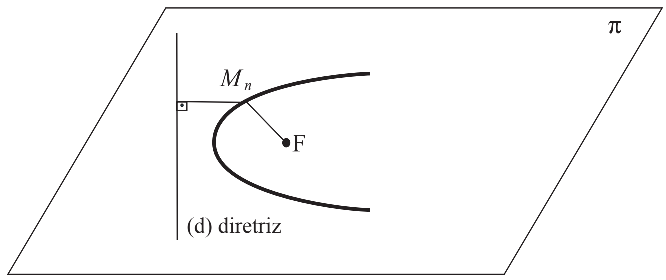
Dois exemplos clássicos são, a descoberta de Galileu Galilei que em 1604 descobriu que um projétil que era lançado horizontalmente do topo de uma torre tinha uma trajetória em forma de parábola se considerando atuante apenas a força da gravidade e a publicação de Képler em 1609 de sua descoberta de que a órbita de Marte em torno do Sol era uma elipse, lançando a hipótese que todos os planetas se moveriam em órbitas elípticas, o que foi comprovado décadas mais tarde por Isaac Newton.

DEFINIÇÕES MATEMÁTICAS

Embora, como visto, as curvas cônicas poderem ser obtidas através de seções em um cone, seu estudo através da geometria analítica é feito a partir de suas definições matemáticas e de suas equações descritas em relação a um sistema de referência.

Steimbruch (1987), nos dá uma definição matemática para cada uma das curvas cônicas abordadas (FIG. 3, 4 e 5).

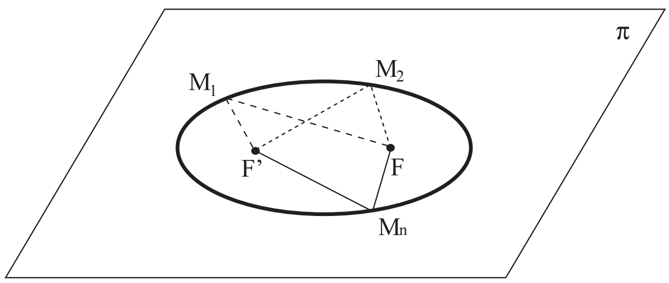
“Parábola é o lugar geométrico dos pontos do plano que são equidistantes de uma reta d (diretriz) e de um ponto F (foco) não pertencente a d.”



$Mn \in parábola \Rightarrow dM_nF = dM_n(d)$

FIGURA 3 – Parábola

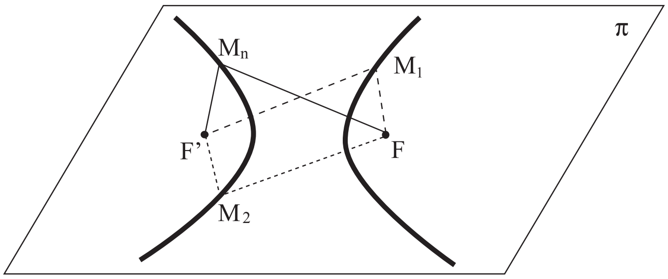
“Elipse é o lugar geométrico dos pontos do plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos (focos) desse plano é constante.”



$Mn \in elipse \Rightarrow dM_nF' + dM_nF = k$

FIGURA 4 – Elipse

“Hipérbole é o lugar geométrico dos pontos de um plano cuja diferença das distâncias, em valor absoluto, a dois pontos fixos (focos) desse plano é constante.”



$Mn \in hipérbole \Rightarrow |\, dM_nF' - dM_nF \,| = k$

FIGURA 5 – Hipérbole

Mn	*um ponto qualquer pertencente às cônicas*
dPF	*distância do ponto P ao foco F*
dPd	*distância do ponto P à reta diretriz*
dPF'	*distância do ponto P ao foco F'*
k	*constante característica das cônicas*

TABELA 1 – Símbolos

EQUAÇÕES REDUZIDAS DAS CÔNICAS

Pode-se definir precisamente a posição de um ponto num plano por meio de um par de números reais (coordenadas do ponto). Para isso é necessário utilizar um sistema de referência. Um sistema de referência é composto de um referencial e de uma regra que define como os pontos serão localizados em relação a este referencial.

Existem vários sistemas de referência que são regularmente utilizados na Geometria Analítica. Como exemplo, pode-se citar o sistema de coordenadas retangulares e o sistema de coordenadas polares.

Estes sistemas são os mais usados, mas existem outros. Na verdade, é possível criar sistemas de referência de acordo com a necessidade, bastando para isso, definir um referencial e uma regra para a localização dos pontos no plano.

O estudo analítico das curvas planas é feito por meio de equações descritas em relação a um sistema de referência. Uma curva plana é um conjunto de pontos que obedecem a uma determinada regra e sua equação é uma expressão matemática que define tal regra. Por exemplo, para que um conjunto de pontos seja considerado uma reta, eles precisam estar alinhados e obedecer a uma regra do tipo $ax + by + c = 0$ que é uma equação em relação ao sistema de coordenadas retangulares. Cada curva tem uma equação bem definida em relação a um sistema de referência. Ao mudar o sistema de referência muda-se também a equação da curva. Às vezes uma curva possui uma equação mais simples, ou mais apropriada, em relação a um determinado sistema de referência. Por isso existem vários, e são utilizados de maneira conveniente.

As equações reduzidas das cônicas, que são as equações mais simplificadas destas curvas, são obtidas quando o sistema de referência está posicionado em determinados locais que serão descritos.

Neste texto as equações reduzidas das cônicas serão definidas em relação a um sistema de coordenadas retangulares.

O sistema de coordenadas retangulares tem como referencial um par de eixos, chamados de eixos coordenados, infinitos e perpendiculares entre si.

Para cada eixo é definida uma escala (normalmente a mesma para os dois) cuja origem é a interseção.

Os números reais são representados nestes eixos, sendo que a distância entre dois números inteiros, é uma unidade da escala definida. O número zero está na interseção dos eixos e é chamado de origem do sistema.

O eixo horizontal é o eixo das abscissas que são representadas pela letra **x**. O eixo vertical é o eixo das ordenadas, representadas pela letra **y**.

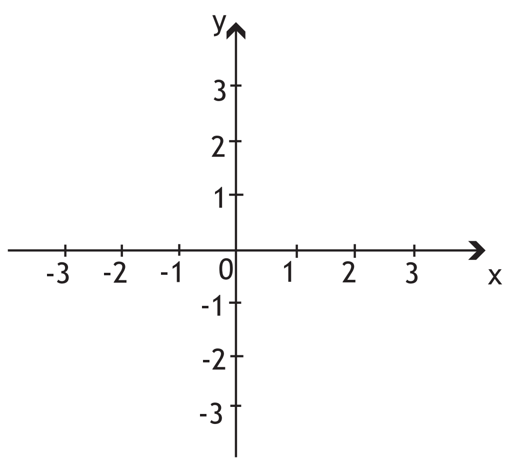


FIGURA 6 – Sistema de coordenadas retangulares

NA FIG. 6 têm-se o sistema de coordenadas retangulares como um sistema de referência de um plano. Com isso, qualquer ponto pertencente ao plano pode ser perfeitamente localizado. Esta localização será feita medindo-se a distância orientada (considerando o sinal negativo) de um ponto aos eixos coordenados. A distância do ponto ao eixo y será sua abscissa e a distância do ponto ao eixo x será sua ordenada. Isto irá conferir ao ponto um par ordenado de números reais do tipo *P(x, y).*

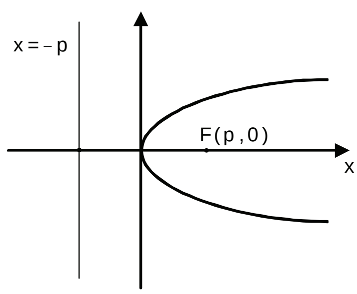
Esta é a regra para a localização de pontos em um plano em relação ao sistema de coordenadas retangulares. É importante observar que, a distância do ponto em relação a um eixo coordenado é o valor absoluto de uma de suas coordenadas, ou seja, se o ponto estiver localizado à esquerda do eixo y, sua abscissa terá sinal negativo, bem como sua ordenada terá sinal negativo se ele estiver localizado abaixo do eixo x.

Cada ponto do plano será então identificado por um, e apenas um, par ordenado de números reais e, cada par ordenado de números reais representará apenas um ponto do plano. É o que chamamos de característica biunívoca do sistema de coordenadas retangulares.

Em homenagem a René Descartes (1596 – 1650), cujo nome em Latim era *Renatus Cartesius*, filósofo e matemático francês, considerado o pai da Geometria Analítica, o sistema de coordenadas retangulares desenvolvido por ele, é também denominado de Sistema Cartesiano ou Plano Cartesiano.

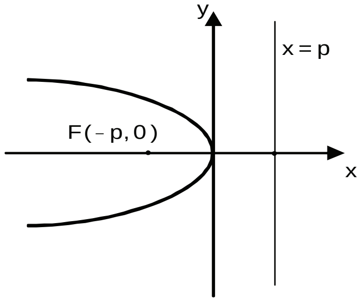
EQUAÇÕES REDUZIDAS DAS PARÁBOLAS

Para as parábolas, se forem posicionadas de modo que seu vértice fique na origem do sistema cartesiano e seu foco sobre um dos eixos coordenados, tem-se sua equação cartesiana reduzida que possui quatro tipos possíveis (FIG. 7, 8, 9 e 10);



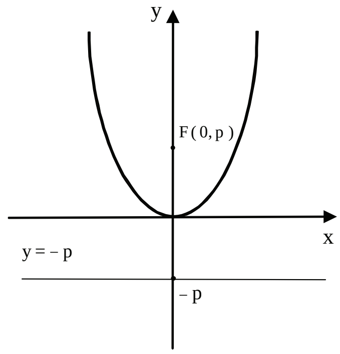
$$y^2 = 4\ px$$

FIGURA 7 – Parábola tipo 1



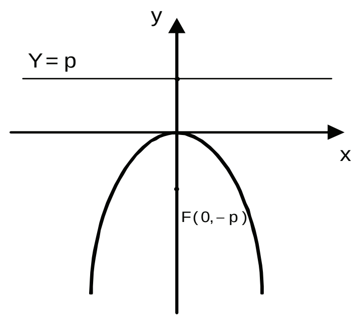
$$y^2 = 4\ px$$

FIGURA 8 – Parábola tipo 2



$$x^2 = 4\ py$$

FIGURA 9 – Parábola tipo 3

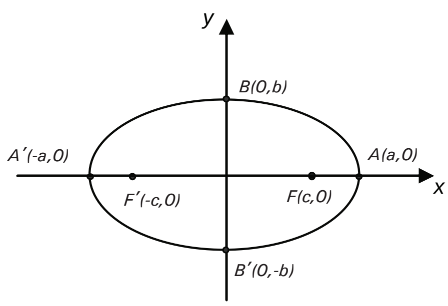


$$x^2 = -\ 4\ py$$

FIGURA 10 – Parábola tipo 4

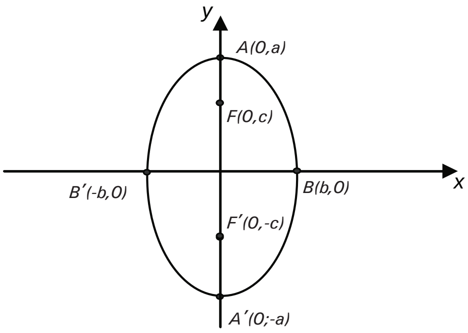
EQUAÇÕES REDUZIDAS DAS ELÍPSES

Para as elípses, seu posicionamento deve ser de tal forma que seus focos fiquem sobre um dos eixos coordenados e simétricos em relação à origem, neste caso surgem dois tipos de equações reduzidas (FIG. 11 e 12);



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

FIGURA 11 – Elípse tipo 1

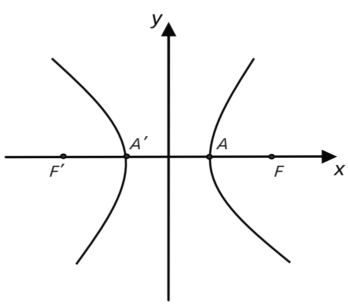


$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$$

FIGURA 12 – Elípse tipo 2

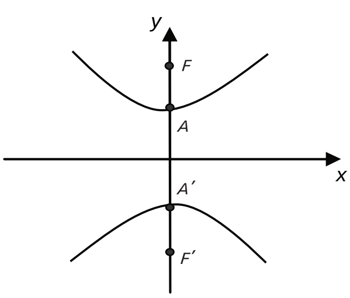
EQUAÇÕES REDUZIDAS DAS HIPÉRBOLES

Para as hipérboles, seu posicionamento é similar ao das elipses, ou seja, focos sobre um dos eixos coordenados e simétricos em relação à origem (FIG. 13 e 14);



$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

FIGURA 13 – Hipérbole tipo 1



$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$$

FIGURA 14 – Hipérbole tipo 2

AS CÔNICAS NA ENGENHARIA

As características físicas das curvas cônicas aparecem em diversos tipos de obras de engenharia civil como pontes, viadutos e túneis como solução estrutural e/ou estética.

UM EXEMPLO TEÓRICO

Um exemplo clássico da aplicação das curvas cônicas na engenharia é descrito a seguir:

A FIG. 15 mostra um túnel hipotético de duas pistas com uma seção transversal que é uma parábola. A altura H do túnel é de 7m e sua largura na base é de L =20 $\sqrt{7}$ m. Pretende-se saber a que altura *h* deverá estar a pista 2 de modo que ela tenha l = 40 m de largura.

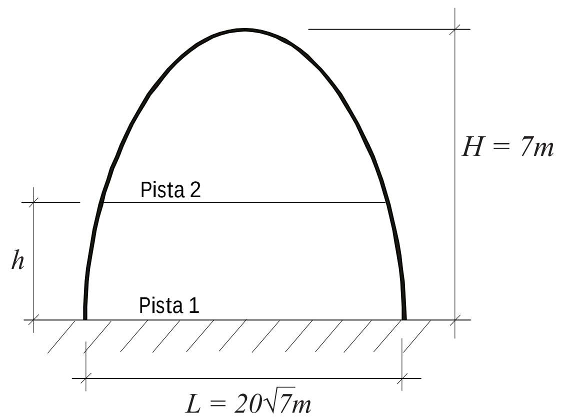


FIGURA 15 – Esquema de túnel com seção transversal em forma de parábola

Para solucionar o problema é necessário encontrar a equação da parábola, e para isto é preciso posicionar no esquema um sistema de referência (plano cartesiano). Se o plano cartesiano for posicionado com sua origem no topo do túnel, onde está o vértice da parábola, então obter-se á sua equação reduzida.

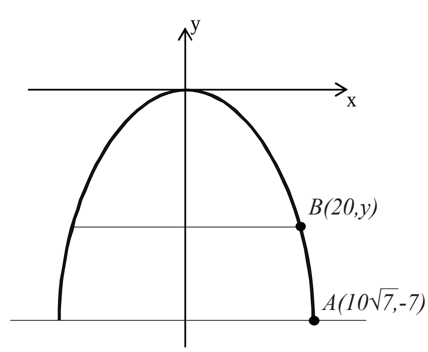


FIGURA 16 – Esquema do túnel com o plano cartesiano

A FIG. 16 mostra o sistema cartesiano posicionado de tal maneira que a equação reduzida da parábola tenha a forma genérica $x^2 = -4py$. Para determinar a equação específica da parábola do túnel, basta substituir na equação genérica o ponto $A(10\sqrt{7}, -7)$ que é um ponto conhecido da curva (seção do túnel);

$(10\sqrt{7})^2 = -4p(-7)$
$700 = 28p$
$p = 25$

desta maneira obtém-se $p = 25$ e então a equação específica da parábola será

$x^2 = -4(25)y$ ou $x^2 = -100y$.

substituindo o ponto $B(20, y)$ na equação da parábola, vem;

$20^2 = -100y$
$400 = -100y$
$y = -4$

A ordenada do ponto *B* é *– 4* então podemos concluir que a altura *h* da pista 2 será:

$h = 7 - 4$
$h = 3m$

EXEMPLOS REAIS NA ENGENHARIA

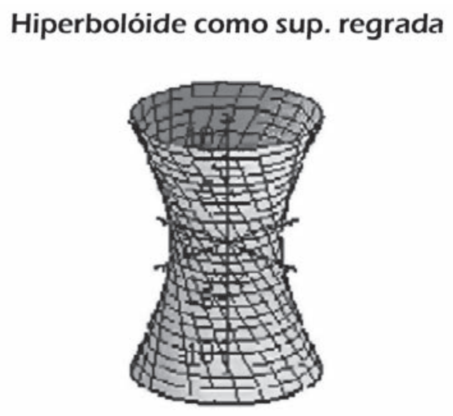
Fonte: www.infobrasiia.com.br

FIGURA 17 – Catedral de Brasília

Na FIG. 17 vê-se a Catedral de Brasília. As estruturas de concreto são arcos de parábolas que têm funções estrutural e também estética.

Fonte: www.nuctec.com.br

FIGURA 18 – Central Nuclear de Grafenrheinfeld, Alemanha



Fonte: Sato, J., 2005

FIGURA 19 – Hiperbolóide de uma folha

As torres de refrigeração de uma usina nuclear, como as mostradas na FIG. 18, geralmente são estruturas em formato de hiperbolóide de uma folha gerado pela rotação de uma hipérbole em torno de um de seus eixos (FIG. 19).

“Podemos mostrar que o hiperbolóide de uma folha gerado pela rotação de uma hipérbole em torno do seu eixo transverso é também gerado por uma reta. Ou seja, ele pode ser considerado como sendo formado por uma união de retas (**superfície regrada**). Assim, seu formato é usado na construção de centrais de energia atômica, onde barras de aço retilíneas (que têm alta resistência) se cruzam para obter estruturas extremamente fortes.” (SATO, J., 2005).

CONCLUSÕES

Através dos tempos estas notáveis curvas planas surgiram como importantes coadjuvantes no processo de evolução da ciência em geral. Suas características foram utilizadas em diversos projetos, em diversas áreas do conhecimento. Na engenharia suas propriedades físicas foram decisivas para a solução estrutural de grandes e importantes obras, e sua beleza plástica contemplada em monumentos e imponentes estruturas.

É muito amplo o campo de estudos referentes a estas curvas. Suas propriedades reflexivas, não tratadas neste trabalho, são muito utilizadas na indústria (automobilística, de telecomunicações, etc.), e importantes nos projetos de pesquisas e explorações espaciais.

Também na engenharia, as possibilidades de utilização das propriedades das curvas cônicas são bastante amplas. Novos projetos e pesquisas surgem a cada dia, sugerindo que o conhecimento a respeito destas fantásticas curvas ainda é de suma importância nos dias atuais.

REFERÊNCIAS

CERVO, A. L.; BERVIAN, P. A., (1996) – *Metodologia cientifica.* MAKRON books. 4ª Edição. Sao Paulo.

CONDE, Antônio. (2004) – *Geometria analítica*. Atlas. São Paulo.

EVES, Howard. (1997) – *Introdução à história da matemática* – 2ª ed. Campinas, SP. Editora da Unicamp.

FRANÇA, J.L.; VASCONCELLOS, A.C., (2004) – Manual para normalização de publicações técnico científicas. UFMG. 7ª Edição. Belo Horizonte.

MASON, Jayme. (1977) – *Pontes em concreto armado e protendido.* Livros Técnicos e Científicos. Rio de Janeiro.

SATO, J. (2005) – *As Cônicas e suas Aplicações*. Universidade Federal de Uberlândia. Uberlândia.

STEINBRUCH, Alfredo. (1987) – *Geometria analítica* – 2ª ed. Mc Graw-Hill. São Paulo.

VASCONCELOS, Augusto Carlos de. (1993) – *Pontes brasileiras* – viadutos e passarelas notáveis. Pini. São Paulo.

WINTERLE, Paulo. (2000) – *Vetores e geometria analítica. Makron Books*. São Paulo.